$\vec{\alpha}=(1,-1,-2)$ • Να υπολογίσετε:
$\vec{\beta}=(2,4,1)$ $A=\left[\left((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}\right)\times\vec{\gamma}\right]\cdot\vec{\alpha}$
$\vec{\gamma}=(3,0,4)$ • ΝΔΟ τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμ. ανεξάρτητα.

ΛΥΣΗ

α' τρόπος

• $A=\left[\left((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}\right)\times\vec{\gamma}\right]\cdot\vec{\alpha}=\left\{\left((\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\beta}\vec{\gamma})\vec{\alpha}\right)\times\vec{\gamma}\right\}\vec{\alpha}=$

$=\left\{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})-(\vec{\beta}\vec{\gamma})(\vec{\alpha}\times\vec{\gamma})\right\}\vec{\alpha}=$

$=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\vec{\alpha}-(\vec{\beta}\vec{\gamma})(\vec{\alpha}\times\vec{\gamma})\vec{\alpha}=$

$=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})-\cancel{(\vec{\beta}\vec{\gamma})(\vec{\alpha},\vec{\alpha},\vec{\gamma})}^{\,0}=$

$=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ ①

• $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(1,-1,-2)\cdot(3,0,4)=3-8=-5$

• $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\2&4&1\\3&0&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4&1\\0&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&0\end{vmatrix}=$

$=16+8-3-2\cdot(-12)=16+5+24=45$

Άρα, ①, $A=-5\cdot45=-225$

• Αφού $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=45\neq0$ τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμ. ανεξάρτητα

β' τρόπος

Μπορούμε να πούμε

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{x_0}&\vec{y_0}&\vec{z_0}\\1&-1&-2\\2&4&1\end{vmatrix}=(-1+8,-4-1,4+2)=(7,-5,6)$

$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=\begin{vmatrix}\vec{x_0}&\vec{y_0}&\vec{z_0}\\7&-5&6\\3&0&4\end{vmatrix}=(-20,18-28,-15)=(-20,-10,-15)$

$((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma})\times\vec{\gamma}=\begin{vmatrix}\vec{x_0}&\vec{y_0}&\vec{z_0}\\-20&-10&-15\\3&0&4\end{vmatrix}=(\ ,\ ,\ )\ \ldots$ κ.λπ